Adı Soyadı:
Numarası:
Grubu:
İmza:

1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

21.04.2022

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 212 ANALİZ IV ARASINAV SORULARI

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+3xy+y^2}$ limitinin olup olmadığını gösteriniz.

2) $f(x,y)=\begin{cases} x+y^2, & (x,y)\neq(1,1) \\ m, & (x,y)=(1,1) \end{cases}$ fonksiyonunun $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ noktasında sürekli olması için m ne olmalıdır?

3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=\begin{cases} \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+1}, \dfrac{x+z}{x^2+y^2+z^2}\right), & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ (0,0), & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ noktasında sürekli midir? Neden?

4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x^2,xy)=(u,v)$ ve $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ g(u,v)=u^2+v^2$ dönüşümleri için $D(g\circ f)(x,y)$ yi bulunuz.

5) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ f(x)=x$ olarak tanımlanıyor. f nin türevlenebilir olduğunu gösteriniz, türevini bulunuz, Jacabiyen matrisini bulunuz.

6) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ türevlenebilir iki dönüşüm olsun. $J_f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ x_1 & -x_3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\dfrac{\partial h(x,y)}{\partial y}=h(x,y),\ \dfrac{\partial h}{\partial x}=0$ ise $G(x,y)=f(x,y,h(x,y))$ şeklindeki $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ fonksiyonunun Jacobiyen matrisini bulunuz.

7) $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da türevlenebilir olduğunu gösteriniz. Ayrıca $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ kısmi türevinin mevcut olduğunu tanımı kullanarak gösteriniz.

8) $f(x,y,z)=z-\sin(x+y)$ fonksiyonunun $A=(0,1,0)$ noktasını $B=(1,1,2)$ noktasına birleştiren doğru yönünde $(0,0,0)$ noktasında yönlü türevini bulunuz.

Not: Sadece 6 soru cevaplayınız. Sorular eşit puanlıdır. Süre 100 dakikadır. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

ARASINAV ÇÖZÜMLERİ

1) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{\frac{1}{n^2} + 3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + 1/n^2} = 1/5$

$(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{\frac{1}{n^2} - 3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{-1/n^2} = -1$

$\frac{1}{5} \neq -1$ olup, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+3xy+y^2}$ limiti yoktur.

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1) = m$ olmalıdır.

$\forall \varepsilon > 0$ verilsin. $\|(x,y) - (1,1)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$ olduğunda

$|f(x,y) - 2| = |x + y^2 - 2| = |x - 1 + (y-1)^2 + 2(y-1)|$

$\leq |x-1| + |y-1|^2 + 2|y-1|$

$< \delta + \delta^2 + 2\delta < 4\delta$

$\delta = \varepsilon/4$ alınırsa $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 2$ bulunur. $m=2$ olmalıdır.

3) $\forall \varepsilon > 0$ verilsin. $\|(x,y,z) - (0,0,0)\| < \delta$ iken

$\|f(x,y,z) - f(0,0,0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunmalı.

$\|(x,y,z) - (0,0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta \Rightarrow |x| < \delta, |y| < \delta, |z| < \delta$

$|f_1(x,y,z) - 0| = \left|\dfrac{x}{x^2+y^2+1}\right| < \dfrac{|x|}{x^2+y^2+1} < |x| < \delta$

$\delta = \varepsilon$ seçilirse $f_1(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$, $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ de sürekli olur.

$f_2(x,y,z) = \dfrac{x+z}{x^2+y^2+z^2}$ fonksiyonunun $(0,0,0)$ da sürekli olup

olmadığını inceleyelim:

$(x_n, y_n, z_n) \Rightarrow \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0,0)$ dizisi için

$f_2(x_n, y_n, z_n) = \dfrac{1/n + 1/n}{1/n^2 + 1/n^2 + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{2/n}{3/n^2} = \frac{2}{3} n \to \infty \ (n\to\infty)$ ve

$f_2(0,0,0) = 0 \neq \infty$ olduğundan f_2 sürekli değildir. Dolayısıyla

$f = (f_1, f_2)$ fonk. sürekli değildir.

4) $g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x,y)=g(f(x,y))=g(x^2,xy)=x^4+x^2y^2$

$D(g\circ f)(x,y)=Dg(f(x,y))\circ Df(x,y) = J_g f(x,y)\, J_f(x,y)$

$J_f(x,y)$ yi bulalım: $f_1(x,y)=x^2$, $f_2(x,y)=xy$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}=y$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}=x$ olup,

$$J_f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ y & x\end{bmatrix}$$

$$J_g(f(x,y))=J_g(u,v)=\left[\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v}\right]=[2u,2v]=[2x^2,2xy]$$

$$D(g\circ f)(x,y)=[2x^2,2xy]_{1\times2}\cdot\begin{bmatrix}2x & 0\\ y & x\end{bmatrix}_{2\times2}=\begin{bmatrix}4x^3+2xy^2 & 2x^2y\end{bmatrix}$$

$$D(g\circ f)(a,b)(x,y)=J_{g\circ f}(a,b)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4a^3+2ab^2 & 2a^2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$=(4a^3+2ab^2)x+2a^2by$$

5) $a\in\mathbb{R}^n$ keyfi olsun. $I:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ birim fonksiyonu doğrusaldır.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-I(x-a)}{\|x-a\|}=\lim_{x\to a}\frac{x-a-(x-a)}{\|x-a\|}=\lim_{x\to a}0=0$$

olup, f türevlenebilirdir. $Df(a)(x)=I(x)$ dir.

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1,x_2,\dots,x_n)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x))$

$$J_f(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & 1\end{bmatrix}$$ bulunur.

6)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$\varphi(x,y)=(x,y,h(x,y))$ olsun.
$=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$

$G(x,y)=(f\circ\varphi)(x,y)=f(\varphi(x,y))=f(x,y,h(x,y))$

$$J_\varphi(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & h(x,y)\end{bmatrix}$$

$$J_f(\varphi(x,y)) = J_f(x,y,h(x,y)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ h(x,y) & -h(x,y) & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_G(x,y) = J_f(\varphi(x,y))\, J_\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ h(x,y) & -h(x,y) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & h(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -h(x,y) \\ h(x,y) & 0 \end{bmatrix}$$

7) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x,y) - f(0,0) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$= \Theta(x,y) + \|(x,y)-(0,0)\| \cdot \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ~~süreklidir~~ : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} r(x,y) = 0$ dır:

$$0 \le \left| \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

$\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ seçilirse $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |r(x,y) - 0| < \varepsilon$ olur.

Dolayısıyla f, $(0,0)$ da türevlenebilir olup $Df(0,0) = \Theta$ sıfır dönüşü.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{\sqrt{0+t^2}}}{t} = \lim_{t\to 0} t\cdot\sin\frac{1}{|t|} = 0 \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{\sqrt{t^2}}}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{|t|} = 0$$

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ keyfi olsun. $a \neq 0$ ise

$$\frac{\partial f(a,0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,0)-f(a,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(a+t)^2\sin\frac{1}{\sqrt{(a+t)^2}} - a^2\sin\frac{1}{|a|}}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} 2(a+t)\sin\frac{1}{|a+t|} + (a+t)^2\cdot\cos\frac{1}{|a+t|}\cdot\frac{-1}{(a+t)^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} 2(a+t)\sin\frac{1}{|a+t|} - \cos\frac{1}{|a+t|} = 2a\sin\frac{1}{|a|} - \cos\frac{1}{|a|} \quad (a \neq 0)$$

$\boxed{b \neq 0 \text{ ise}}$

$$\frac{\partial f(0,b)}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,b)-f(0,b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(t^2+b^2)\sin\frac{1}{\sqrt{t^2+b^2}} - b^2\sin\frac{1}{|b|}}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} 2t\sin\frac{1}{\sqrt{t^2+b^2}} - \frac{t}{\sqrt{t^2+b^2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{t^2+b^2}} = 0$$

$a \neq 0, b \neq 0$ ise,

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left[(a+t)^2+b^2\right]\sin\frac{1}{\sqrt{(a+t)^2+b^2}} - (a^2+b^2)\sin\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}{t}$$

$$\overset{[0/0]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{2(a+t)\sin\frac{1}{\sqrt{(a+t)^2+b^2}} + \left[(a+t)^2+b^2\right]\cos\frac{1}{\sqrt{(a+t)^2+b^2}}\cdot(-1/2)\cdot\left[(a+t)^2+b^2\right]^{-3/2}\cdot 2(a+t)}{1}$$

$$= 2a\sin\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + (a^2+b^2)\cos\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(-1/2)\,(a^2+b^2)^{-3/2}\cdot 2a$$

$$= 2a\sin\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(8) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,1,2)-(0,1,0) = (1,0,2)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \neq 1$ birim vektör değil.

$\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ birim vektör

$$D_{\vec{v}} f(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0,0)+t\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) - f(0,0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t}{\sqrt{5}} - \sin\frac{t}{\sqrt{5}}}{t}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$